تنظیم : صادق طاهری ، مدرس ریاضیات کنکور

شامل مباحث تابع ، مثلثات و حد پایه دوازدهم

شماره تماس : ۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

۱ گزینه ۳

$$g(x) = ۲f(\frac{x}{۳}) = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = g^{-۱}(y) \\ f(\frac{x}{۳}) = \frac{y}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۳} = f^{-۱}(\frac{y}{۲}) \Rightarrow x = ۳f^{-۱}(\frac{y}{۲}) \end{cases} \Rightarrow g^{-۱}(y) = ۳f^{-۱}(\frac{y}{۲})$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x) = ۳f^{-۱}(\frac{x}{۲}) = ۳(۸(\frac{x}{۲})^{۳} + ۴(\frac{x}{۲})) = ۳x^{۳} + ۶x$$

$$a = ۳ \ , \ b = ۶ \Rightarrow a + b = ۹$$

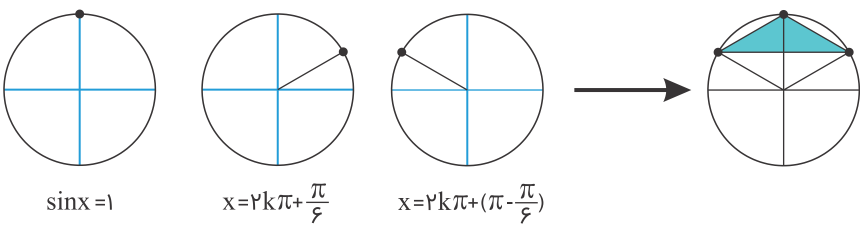
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

۲ گزینه ۳

$$\cos ۲x + ۳\sin x - ۲ = ۰ \Rightarrow ۱ - ۲\sin^{۲}x + ۳\sin x - ۲ = ۰$$

$$۲\sin^{۲}x - ۳\sin x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۶}) \end{cases} \end{cases}$$



قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۶

۳ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار، $(gof)(x) = x$ است؛ به‌عبارت‌دیگر $g(f(x)) = x$ است. برای به دست آوردن حاصل $g(۵)$ کافی است معادلهٔ $f(x) = ۵$ را حل کنیم.

$$f(x) = \frac{۲^x - ۱}{۳} = ۵ \Rightarrow ۲^x = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

درنتیجه $g(۵) = ۴$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۸

۴ گزینه ۳

ازآنجایی‌که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر است، لذا $f(-۲) = ۰$ خواهد بود.

$$f(-۲) = ۰ \Rightarrow ۴ + ۲ + ۲ - ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

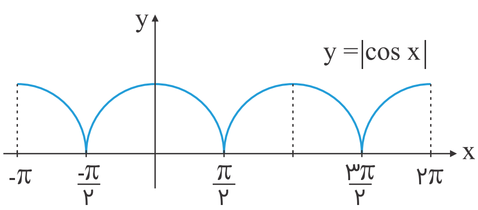
درنتیجه $f(x) = x^۲ - x - ۶$ است. برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ در $(x - ۴)$ کافی است $f(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(۴) = ۴^۲ - ۴ - ۶ = ۶$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

۵ گزینه ۱

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



بنابراین در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲}, \pi)$ تابع صعودی است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

۶ گزینه ۴

$$\lim_{x \to ۱^+} g(x) = \lim_{x \to ۱^+} f(\frac{۱}{x}) = \lim_{t \to ۱^-} f(t) = -۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(f(x)) = \lim_{t \to ۱^-} f(t) = -۱$$

پس حاصل نهایی $-۱ - ۱ = -۲$ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۷

گزینه ۳

ابتدا g^{-1} را می‌یابیم:

$$g^{-1} = \{(0, -2), (3, 0), (-1, 1), (-2, 3)\}$$

بنابراین:

$$f\left(g^{-1}(-2)\right) = f(3) = 3^2 - \sqrt{9} = 6$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۸

گزینه ۳

راه‌حل اول:

مقدار عبارت داده‌شده و هر ۴ گزینه را حساب می‌کنیم:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$A = 1 - 2\sin^2 150^\circ = 1 - 2(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

گزینهٔ ۱:

$$-\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینهٔ ۲:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

گزینهٔ ۳:

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

گزینهٔ ۴:

$$\frac{1}{2}\tan 315^\circ = \frac{1}{2}\tan(360^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{2}(-\tan 45^\circ) = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

پس مقدار A فقط با گزینهٔ ۳ برابر است.

راه‌حل دوم:

با استفاده از اتحاد $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ و با جایگذاری $\theta = 150^\circ$ داریم:

$$\cos 300^\circ = 1 - 2\sin^2 150^\circ$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۶ ۱۳۹۸

۹

گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-x}}{\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱-۲x}}=\frac{۱-۱}{۱-۱}=\frac{۰}{۰}=\text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-x}}{\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱-۲x}}\times\frac{\sqrt[۳]{(۱-۲x)^{۲}}+(\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x})+\sqrt[۳]{(۱-x)^{۲}}}{\sqrt[۳]{(۱-۲x)^{۲}}+(\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x})+\sqrt[۳]{(۱-x)^{۲}}}\times\frac{\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x}}{\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{((۱-۲x)-(۱-x))\left(\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x}\right)}{((۱-x)-(۱-۲x))\left(\sqrt[۳]{(۱-۲x)^{۲}}+\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^{۲}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\cancel{x}(\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x})}{\cancel{x}(\sqrt[۳]{(۱-۲x)^{۲}}+\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^{۲}})}$$

$$=\frac{-(۱+۱)}{۱+۱+۱}=\frac{-۲}{۳}$$

روش دوم:

نکته: وقتی $x\to ۰$ میل کند، آنگاه حد عبارت $\sqrt[n]{۱\pm x}$ با حد عبارت $(۱\pm\frac{x}{n})$ برابر است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-x}}{\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱-۲x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\frac{۲x}{۳})-(۱-\frac{x}{۳})}{(۱-\frac{x}{۲})-(۱-\frac{۲x}{۲})}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۲x}{۳}+\frac{x}{۳}}{-\frac{x}{۲}+x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x}{۳}}{\frac{x}{۲}}=-\frac{۲}{۳}$$

تالیفی رضا عابدی

۱۰

گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=۳\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{۶x}{ax^{n}}=۳$$

درنتیجه باید صورت و مخرج هم‌درجه باشند؛ پس $n=۱$ است.

$$\xrightarrow{n=۱}\lim_{x\to +\infty}\frac{۶x}{ax}=۳\Rightarrow\frac{۶}{a}=۳\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۱}\frac{۶x-\sqrt{۵x+۳۱}}{۲x-۲}\times\frac{۶x+\sqrt{۵x+۳۱}}{\underbrace{۶x+\sqrt{۵x+۳۱}}_{۱۲}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳۶x^{۲}-(۵x+۳۱)}{(۲x-۲)(۱۲)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۳۶x+۳۱)}{۲(x-۱)(۱۲)}=\frac{۶۷}{۲۴}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \frac{-\infty}{\sqrt{1+(-1)^+}} = \frac{-\infty}{\sqrt{0^+}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۶

۱۲ گزینه ۳

چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر $x-2$ برابر ۴ است، پس $g(2)=4$ می‌باشد. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ یعنی $f(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(2) = (2-4)g(2) + 4(2) - 3 = -2\times 4 + 8 - 3 = -3$$

تالیفی سیروس نصیری

۱۳ گزینه ۳

$$(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = x + \frac{1}{x} - 2(\sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x}}) = x + \frac{1}{x} - 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2$$

$$f(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}) = (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2 \Rightarrow f(3) = 3^2 + 2 = 11$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۴ گزینه ۳

اگر $\frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\tan\alpha \ge 1$ است.

اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{3\pi}{4}$ آنگاه $\tan\alpha \le -1$ می‌شود، بنابراین برد تابع $y=\tan\alpha$ وقتی $\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{3\pi}{4}$ برابر با $\mathbb{R}-(-1,1)$ است و هیچ‌وقت $-\frac{1}{2}$ نمی‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۵

گزینه ۲

$$x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^-} \left(\frac{x}{\sqrt{(x-۱)^۲}} + \frac{۲}{x^۲-۱}\right) = \lim_{x\to ۱^-} \left(\frac{x}{|x-۱|} + \frac{۲}{x^۲-۱}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۱^-} \left(\frac{x}{-(x-۱)} + \frac{۲}{x^۲-۱}\right) = \infty - \infty$$

برای رفع ابهام، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{x(x+۱)-۲}{-(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲+x-۲}{-(x-۱)(x+۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۲)}{-(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱^-} -\frac{x+۲}{x+۱} = -\frac{۳}{۲}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۴

۱۶

گزینه ۳

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{cases} (\sin x + \cos x)^۲ = \underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + ۲\sin x \cos x = ۱ + ۲\sin x\cos x \\ \sin^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}\right) = \left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱ + ۲\sin x\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\sin x \cos x = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{-۱}{۲}$$

$$\sin ۲x = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۱۷

گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x) = 0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

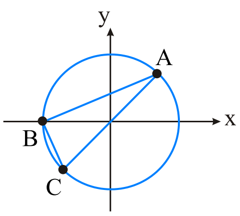
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x = 0$ و $x = 2\pi$ عبارت $1 - \cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف‌نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x = \pi,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AC} = \pi \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۸

گزینه ۱

در تابع $y = x^2 - 2x\ ;\ x < 1$ می‌توان نوشت:

$$y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y+1} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y+1}$$

چون $x < 1$ است، علامت + مورد قبول نیست پس ضابطهٔ وارون تابع به‌صورت $1 - \sqrt{x+1}$ خواهد بود.

آزمایشی سنجش علوم تجربی چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

۱۹ گزینه ۲

داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}=-۲$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=-۲$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m+۳=n-۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}}=\frac{۱}{m}=-۲\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

و همچنین:

$$m+۳=n-۲\xrightarrow{m=-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}+۳=n-۲\Rightarrow n=-\frac{۱}{۲}+۵=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$m+n=-\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۰

گزینه ۱

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انبساط (انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f = \left[-\sqrt{۵}, ۱\right] \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq f(x) \leq ۱$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند}]{\text{انتقال افقی}} -\sqrt{۵} \leq f(x+۱) \leq ۱$$

$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{۲})} -\sqrt{۲} \leq -\sqrt{۲}f(x+۱) \leq \sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{-۳} -\sqrt{۲}-۳ \leq -\sqrt{۲}f(x+۱)-۳ \leq \sqrt{۱۰}-۳$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲}-۳ \leq g(x) \leq \sqrt{۱۰}-۳$$

$$\Rightarrow R_g = \left[-\sqrt{۲}-۳, \sqrt{۱۰}-۳\right]$$

ازآنجاکه $-۵ < -\sqrt{۲}-۳ \leq g(x) \leq \sqrt{۱۰}-۳ < ۱$ برد تابع g شامل پنج عدد صحیح -۴، -۳، -۲، -۱ و صفر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۲۱

گزینه ۴

$$f^{-۱}(۲) = a \Rightarrow f(a) = ۲$$
$$\Rightarrow f(a) = f\left(۱+\frac{x}{۲}\right) = \frac{x}{۴} - ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱۲ \xrightarrow{a=۱+\frac{x}{۲}} a = ۷$$
$$\Rightarrow g\left(f^{-۱}(۲)\right) = g(a) = g(۷) = ۱۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۲۲

گزینه ۳

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-۵$ و $x-۴$ به ترتیب ۳ و ۵ است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow f(۴)=۵ \\ x-۵=۰ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow f(۵)=۳ \end{array}\right\} (*)$$

برای محاسبهٔ محل برخورد نمودار تابع $y = f(f(x)) + ۲x$ و خط $x = ۴$ باید در ضابطهٔ تابع داده‌شده، x را برابر با ۴ قرار دهیم:

$$y = f(f(x)) + ۲x \xrightarrow{x=۴} y = f(f(۴)) + ۲(۴)$$
$$\xrightarrow{(*)} y = f(۵) + ۸ \xrightarrow{(*)} y = ۳ + ۸ = ۱۱$$

بنابراین تابع موردنظر خط $x = ۴$ را در عرض ۱۱ قطع می‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۳

گزینه ۳

$$p(x) = x^{۷} - ۳x^{۴} + ax - ۱ = (x-۱)\,q(x) + ۲ \Rightarrow p(۱) = ۲ \Rightarrow a = ۵$$

$$\Rightarrow p(x) = x^{۷} - ۳x^{۴} + ۵x - ۱ = (x-۱)\,q(x) + ۲$$

$$\Rightarrow p(-۱) = -۲q(-۱) + ۲ \Rightarrow q(-۱) = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۲۴

گزینه ۲

اعداد صحیح -۲، -۱، ۰، ۱، ۲ و ۳ عضو دامنهٔ g هستند. پس:

$$\begin{aligned}
&D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} \\
&D_f = (-\infty, ۰) \cup [۴, +\infty) \\
&g(-۲) = ۰ \xrightarrow{۰ \notin f} -۲ \notin D_{fog} \\
&g(-۱), g(۰) < ۰ \xrightarrow{(-\infty,۰) \in D_f} -۱, ۰ \in D_{fog} \\
&g(۱) = ۰ \xrightarrow{۰ \notin f} ۱ \notin D_{fog} \\
&۰ < g(۲) < ۴ \xrightarrow{(۰,۴) \notin D_f} ۲ \notin D_{fog} \\
&g(۳) = ۴ \xrightarrow{۴ \in D_f} ۳ \in D_{fog}
\end{aligned}$$

پس اعداد صحیح ۰، -۱ و ۳ عضو دامنهٔ تابع fog هستند.

تالیفی سیدمحمدصالح ارشاد

۲۵

گزینه ۲

تابع f اکیداً نزولی است، پس با کاهش x، مقدار آن افزایش می‌یابد. باتوجه‌به آنکه f در $x = ۱$ پیوسته است و مقدار تابع f در $x = ۱$ برابر با ۶ می‌شود، پس وقتی $x \to ۱^-$، $۶ < f(x) < ۷$ است:

$$\lim_{x \to ۱^-} [f(x)] = [۶^+] = ۶$$

همچنین تابع g اکیداً صعودی است، پس با کاهش x، مقدار تابع نیز کاهش می‌یابد. تابع g در $x = ۱$ پیوسته است و مقدار آن در $x = ۱$ برابر با ۳ است، پس وقتی $x \to ۱^-$ ، $۲ < g(x) < ۳$ است:

$$\lim_{x \to ۱^-} [g(x)] = [۳^-] = ۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۱^-} \frac{[f(x)]}{[g(x)]} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۲۶

گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار $f(\circ) = ۴$ و $f(\frac{\pi}{۳}) = \circ$ است.

$$\begin{cases} f(\circ) = ۴ \Rightarrow a + b = ۴ \\ f(\frac{\pi}{۳}) = \circ \Rightarrow a - b = \circ \end{cases} \Rightarrow a = b = ۲ \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{۲ \times ۲} = ۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۲۷

گزینه ۱

نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = x^۳$ به دست آمده است. اگر نمودار $y = x^۳$ را یک واحد به‌سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به‌سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم، ضابطهٔ $y = (x - ۱)^۳ + ۲$ به دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده‌شده در صورت سؤال است، پس:

$$a = ۱,\ b = ۲ \Rightarrow a.b = ۲$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۸ گزینه ۲

صورت و مخرج عبارت داده‌شده به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ صفر می‌شود، پس باید کسر رفع ابهام شود، یعنی صفر کننده‌های صورت و مخرج را باهم ساده کنیم. برای این کار باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج رادیکالی صورت ضرب کنیم:

$$\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} \times \frac{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}$$

$$= \frac{\tan x - \frac{1}{\tan x}}{\cos 2x(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\cos 2x(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos 2x(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

با جایگذاری رابطهٔ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$، کسر بالا به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{-1}{(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

حال حد خواسته‌شده به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})(\cos x.\sin x)}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}} + \sqrt{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}})(\cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4})} = \frac{-1}{(1+1)(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = -1$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۱

باید دو تابع $y = \frac{ax+1}{2}$ و $y = 2ax - 1$ معکوس هم باشند؛ اما معکوس تابع $y = \frac{ax+1}{2}$ به‌صورت زیر حساب می‌گردد:

$$y = \frac{ax+1}{2} \Rightarrow 2y = ax + 1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{a}$$

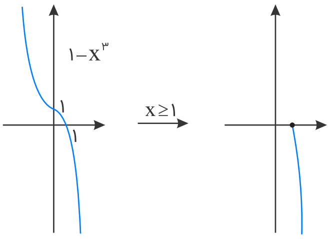
$$\xrightarrow{\text{با تعویض } x \text{ و } y} y = \frac{2x-1}{a} = 2ax - 1 \Rightarrow a = 1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

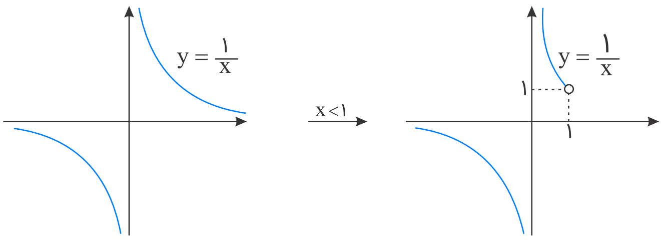
۳۰

گزینه ۴

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، برد ضابطهٔ اول $(-\infty, ۰]$ است. پس برد ضابطهٔ دوم باید $(۰, +\infty)$ باشد.



برد ضابطهٔ دوم شامل اعداد منفی است که برای ما مهم نیست. به علاوه می‌دانیم اگر $۰ < x < ۱$ باشد، $\frac{۱}{x} > ۱$ است و $\frac{۱}{x} + a > ۱ + a$ می‌شود. یعنی فاصلهٔ $(۱ + a, +\infty)$ در برد این تابع قرار می‌گیرد. برای اینکه برد تابع $\mathbb{R}$ شود، ما نیاز داریم که $(۰, +\infty)$ در برد ضابطهٔ دوم قرار بگیرد، پس باید:

$$۱ + a \le ۰ \Rightarrow a \le -۱$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۱

گزینه ۴

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \lim_{x \to ۳^+} \frac{۲}{\sqrt{x + ۶} - x} \times \frac{\sqrt{x + ۶} + x}{\sqrt{x + ۶} + x} = \lim_{x \to ۳^+} \frac{۲\left(\sqrt{x + ۶} + x\right)}{x + ۶ - x^۲}$$
$$= \lim_{x \to ۳^+} \frac{۲\,(۳ + ۳)}{-(x - ۳)(x + ۲)} = \frac{۱۲}{-(۰^+)(۵)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = \lim_{x \to ۳^-} \frac{۲}{\sqrt{x + ۶} - x} \times \frac{\sqrt{x + ۶} + x}{\sqrt{x + ۶} + x} = \lim_{x \to ۳^-} \frac{۲\left(\sqrt{x + ۶} + x\right)}{x + ۶ - x^۲}$$
$$= \lim_{x \to ۳^-} \frac{۲\,(۳ + ۳)}{-(x - ۳)(x + ۲)} = \frac{۱۲}{-(۰^-)(۵)} = +\infty$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۲

گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x) = x^۴ - ax^۳ + x^۲ + ۲ax + ۱$ بر $x + ۱$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-۱)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow P(-۱) = ۴$$

$$P(-۱) = (-۱)^۴ - a(-۱)^۳ + (-۱)^۲ + ۲a(-۱) + ۱ = ۴ \Rightarrow ۱ + a + ۱ - ۲a + ۱ = ۴ \Rightarrow -a + ۳ = ۴$$
$$\Rightarrow a = ۳ - ۴ = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

۳۳

گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه مخرج کسر وقتی $x \to ۲$، به صفر میل می‌کند، باید صورت کسر هم دارای حد صفر باشد در غیر این صورت L متناهی نمی‌شود:

$$۲^۲ + ۲^{a-۲} - ۶ = ۰ \Rightarrow ۲^{a-۲} = ۲ \Rightarrow a - ۲ = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

به ازای $a = ۳$ خواهیم داشت:

$$L = \lim_{x \to ۲} \frac{۲^x + ۲^۳ \times ۲^{-x} - ۶}{۲^۲ \times ۲^{-x} + ۲^x - ۵} = \lim_{x \to ۲} \frac{۲^x + \frac{۸}{۲^x} - ۶}{\frac{۴}{۲^x} + ۲^x - ۵} = \lim_{x \to ۲} \frac{(۲^x)^۲ - ۶(۲^x) + ۸}{(۲^x)^۲ - ۵(۲^x) + ۴}$$

به کمک تغییر متغیر $t = ۲^x$، حاصل حد را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$L = \lim_{t \to ۴} \frac{t^۲ - ۶t + ۸}{t^۲ - ۵t + ۴} = \lim_{t \to ۴} \frac{(t - ۴)(t - ۲)}{(t - ۴)(t - ۱)} = \frac{۴ - ۲}{۴ - ۱} = \frac{۲}{۳}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۳۴

گزینه ۴

ابتدا معکوس تابع $f(x)=۲^{x+۱}$ را می‌یابیم:

$$f(x)=۲^{x+۱}\Rightarrow y=۲^{x+۱}\Rightarrow \log_۲^y=\log_۲^{۲^{x+۱}}$$

$$\Rightarrow \log_۲^y=x+۱\Rightarrow x=\log_۲^y-۱=\log_۲^y-\log_۲^۲=\log_۲^{\frac{y}{۲}}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\log_۲^{\frac{x}{۲}}$$

برای آنکه ترکیب $gof^{-۱}$ قابل انجام باشد، باید دامنهٔ $gof^{-۱}$ را بیابیم:

$$D_{gof^{-۱}}=\{x\in D_{f^{-۱}}|f^{-۱}\in D_g\}=\{x\in(۰,\infty)|f^{-۱}\in D_g\}$$

دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{۶-۲x}$ برابر است با:

$$۶-۲x\geq ۰\Rightarrow ۶\geq ۲x\Rightarrow x\leq ۳$$

بنابراین:

$$D_{gof^{-۱}}=\{x\in(۰,+\infty)|\log_۲^{\frac{x}{۲}}\leq ۳\Rightarrow \frac{x}{۲}\leq ۸\Rightarrow x\leq ۱۶\}$$

$$\Rightarrow D_{gof^{-۱}}=(۰,+\infty)\cap(-\infty,۱۶]=(\underbrace{۰}_{a},\underbrace{۱۶}_{b}]$$

$$\Rightarrow \max(b-a)=۱۶-۰=۱۶$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۶

۳۵

گزینه ۴

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱) $$\lim_{x\to(\frac{۷\pi}{۶})^+}f(x)=\frac{\cos(\frac{۷\pi}{۶})^+}{۱+۲\sin(\frac{۷\pi}{۶})^+}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲\times(\frac{-۱}{۲})^-}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=+\infty$$

گزینهٔ ۲) $$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۶})^+}=\frac{\cos(\frac{-\pi}{۶})^+}{۱+۲\sin(-\frac{\pi}{۶})^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$$

گزینهٔ ۳) $$\lim_{x\to(-\frac{۷\pi}{۶})^-}f(x)=\frac{\cos(\frac{۷\pi}{۶})^-}{۱+۲\sin(\frac{۷\pi}{۶})^-}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(\frac{-۱}{۲})^+}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=-\infty$$

گزینهٔ ۴) $$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۶})^-}f(x)=\frac{\cos(\frac{-\pi}{۶})^-}{۱+۲\sin(-\frac{\pi}{۶})^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(\frac{-۱}{۲})^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۶

گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi + a) = -\sin a$ و $\sin(\pi - a) = \sin a$ و $\sin(\frac{\pi}{۲} + a) = \cos a$، پس:

$$\sin(\frac{\pi}{۲} + a)\sin(\pi + a) - \sin(\pi - a)\cos(-a) = (\cos a)(-\sin a) - (\sin a)(\cos a)$$

$$= -\sin a \cos a - \sin a \cos a = -۲\sin a \cos a = -\sin ۲a$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

۳۷

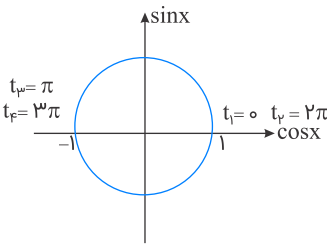
گزینه ۲

اول:

$$\frac{۱}{\cos\frac{x}{۲}} = \cos\frac{x}{۲} \Rightarrow \cos^۲\frac{x}{۲} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{۲} = ۱ \\ \cos\frac{x}{۲} = -۱ \end{cases}$$

دوم: اگر $۰ \leq x \leq ۶\pi$ باشد، آنگاه $۰ \leq \frac{x}{۲} \leq ۳\pi$ است. فرض کنید $\frac{x}{۲} = t$ باشد، در این صورت باید ببینیم وقتی $۰ \leq t \leq ۳\pi$ است معادلات $\cos t = ۱$ و $\cos t = -۱$ چند جواب دارند.

سوم: اگر $\cos t = ۱$ باشد، آنگاه ریشه‌ها $t = ۰$ و $t = ۲\pi$ هستند. اگر $\cos t = -۱$ باشد، ریشه‌ها $t = \pi$ و $t = ۳\pi$ هستند. بنابراین این معادله در مجموع ۴ جواب دارد.

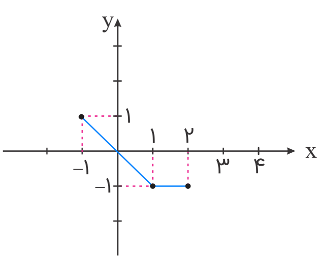


تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۳۸

گزینه ۲

برای پیدا کردن نمودار $y = -f(x + ۲)$ از روی نمودار تابع f، ابتدا نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل شکل زیر است:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۳۹ گزینه ۱

می‌دانیم:

$$f\left(x\right)=[x]+[-x]=\begin{cases}\circ & ;x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین:

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases}g\left(\circ\right)=b & ;x\in\mathbb{Z}\\ g\left(-۱\right)=۱-a+b & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

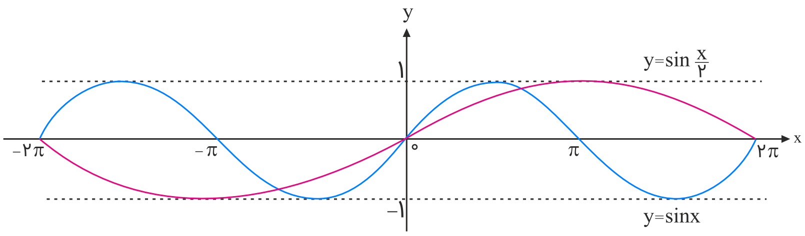
چون برد تابع برابر با $\{۲\}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases}b=۲\\ ۱-a+b=۲\xrightarrow{b=۲}a=۱\end{cases}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۴۰ گزینه ۲

نمودار توابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل دو نمودار در فاصلهٔ $(-۲\pi,۲\pi)$ در سه نقطه باهم برخورد می‌کنند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴۱ گزینه ۲

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

$$=\{-۲\le x\le ۵|-۲\le g(x)\le ۴\}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}\{-۲,-۱,۲,۳,۴,۵\}$$

دقت کنید که ضابطهٔ تابع g به‌صورت زیر است و $g(\circ)$ و $g(۱)$ در بازهٔ $[-۲,۴]$ قرار ندارند.

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{۵}{۲}x-۴ \;;-۲\le x\le\circ\\ \frac{۷}{۵}x-۴ \;;\circ\le x\le ۵\Rightarrow g(\circ)=-۴,g(۱)=-\frac{۱۳}{۵}\notin[-۲,۴]\end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۰

۴۲ گزینه ۳

برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، بنابراین:
بنابراین نمودار تابع $y=-f(-x)$ در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۴۳ گزینه ۴

ابتدا مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۸x+۱۲}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x-۶)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{-۴}{۱۲}=\frac{-۱}{۳}=a$$

حال با جایگذاری مقدار a، داریم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^۴-\frac{۱}{۳}x^۲+۲}{۲x^۴-\frac{۱}{۳}x^۳-۱}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^۴}{۲x^۴}=\frac{-۱}{۲}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۴۴ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x+۱}{x+a}\Rightarrow f(-\frac{۱}{x})=\frac{-\frac{۱}{x}+۱}{-\frac{۱}{x}+a}=\frac{\frac{-۱+x}{x}}{\frac{-۱+ax}{x}}=\frac{x-۱}{ax-۱}$$

$$f(x).f(\frac{-۱}{x})=-۱\Rightarrow\frac{x+۱}{x+a}\times\frac{(x-۱)}{ax-۱}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۴۵ گزینه ۴

$$f(f(a+۱))=۵\Rightarrow\begin{cases}f(a+۱)=۴\Rightarrow a+۱=۳\Rightarrow a=۲\\ \text{یا}\\ f(a+۱)=-۲\Rightarrow a+۱=-۵\Rightarrow a=-۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب مقادیر } a=(۲)(-۶)=-۱۲$$

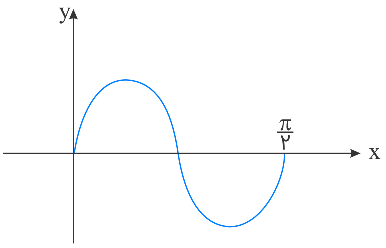
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۹

۴۶ گزینه ۳

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$y = \sin x \cos x \left(\cos^۲ x - \sin^۲ x\right) = \frac{۱}{۲} \sin ۲x . \cos ۲x$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\sin ۴x\right) \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

دورهٔ تناوب این تابع $\frac{\pi}{۲} = \frac{۲\pi}{۴} = T$ است. پس نمودار آن در بازهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ به‌صورت زیر است.

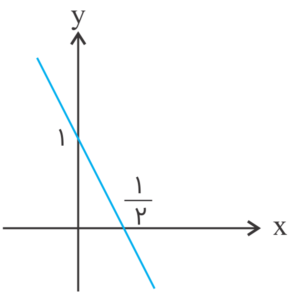


ازآنجاکه بازهٔ $[۰, \pi]$ شامل ۲ دورهٔ تناوب تابع است، نمودار گزینهٔ "۳" پاسخ صحیح است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۴۷ گزینه ۳

اگر $x < ۱$ باشد، برای تعیین ضابطهٔ $y = f(f(x)) = f(-۲x+۱)$، ابتدا نمودار $y = -۲x + ۱$ را رسم می‌کنیم:



باتوجه‌به نمودار، اگر $x > ۰$ باشد، $-۲x + ۱ < ۱$ و اگر $x < ۰$ باشد، $-۲x + ۱ > ۱$ است. بنابراین:

$$y = f(-۲x+۱) = \begin{cases} -۲(-۲x+۱)+۱ & ; \quad ۰ < x < ۱ \\ (-۲x+۱)+۲ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۴x - ۱ & ; \quad ۰ < x < ۱ \\ -۲x + ۳ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

می‌دانیم نمودار $y = ۴x - ۱$ اکیداً صعودی و نمودار تابع $y = -۲x + ۳$ اکیداً نزولی است، پس نمودار f روی $(-\infty, ۱)$ غیریکنوا است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۰

۴۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{x-۲}{\cos ۲x+۱} = \frac{\frac{\pi}{۲}-۲}{۰^+} = \frac{\text{عددی منفی}}{۰^+} = -\infty$$

دقت کنید که چون $-۱ \leq \cos ۲x \leq ۱$؛ بنابراین:

$$۰ \leq \cos ۲x + ۱ \leq ۲$$

و درنتیجه وقتی $x \to \frac{\pi}{۲}$، آنگاه:

$$(۱+\cos ۲x) \to ۰^+$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۶

۴۹ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(\overbrace{۲^{\frac{۱}{x}}}^{t}) = \lim_{t\to +\infty} f(t) = ۳^- \ (\text{از مقادیر کمتر از ۳ نزدیک می‌شود})$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(\overbrace{۲^{\frac{۱}{x}}}^{t}) = \lim_{t\to ۰^+} f(t) = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

تالیفی محمد درمان

۵۰ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه طرفین معادله نامنفی هستند، آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow ۱+\sin^۲ x - ۲\sin x = \cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۱-\cos^۲ x + \sin^۲ x - ۲\sin x = ۲\sin^۲ x - ۲\sin x$$

$$= ۲\sin x(\sin x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = ۰, \pi, ۲\pi \\ \sin x = ۱ \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

مجموع این جواب‌ها برابر $\frac{۷\pi}{۲}$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۹

۵۱

گزینه ۲

اول معادلهٔ $f(x) = -۲$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = x^{۳} - ۱ = -۲ \Rightarrow x^{۳} = -۱ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۲$$

حالا می‌خواهیم $f(g(x)) = -۲$ باشد، پس $g(x) = -۱$ است.

$$g(x) = x^{۲} + ۴x + ۱ = -۱ \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۲ = ۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $\frac{c}{a} = \frac{۲}{۱} = ۲$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

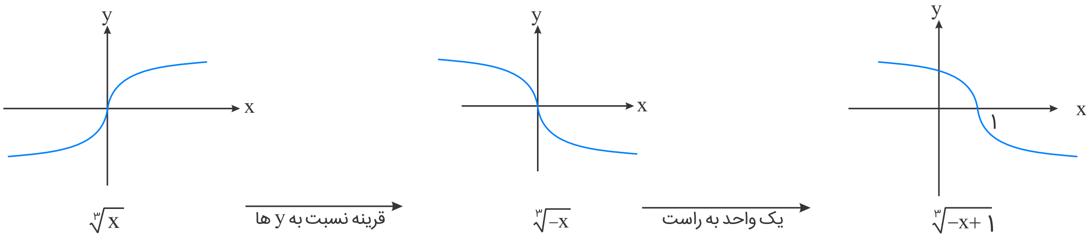
۵۲

گزینه ۱

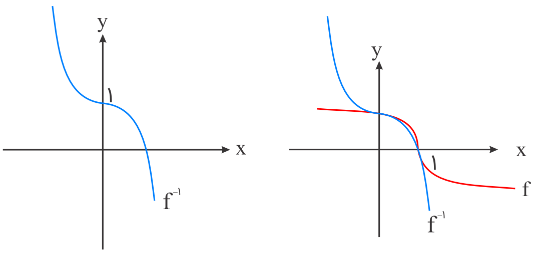
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۱۰x^{۲} + \sqrt{x^{۲} + x}}{x^{۲} + ۱} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۱۰x^{۲} + \sqrt{x^{۲}}}{x^{۲}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۱۰x^{۲} - x}{x^{۲}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۱۰x^{۲}}{x^{۲}} = ۱۰$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۶ ۱۳۹۶

۵۳ گزینه ۴



$$y=\sqrt[۳]{-x+۱}\xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^{۳}=-x+۱\Rightarrow x=-y^{۳}+۱$$
$$y=-x^{۳}+۱=f^{-۱}(x)$$



طبق شکل می‌بینیم یک نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$، $(۰,۱)$ است.

$$A(۰,۱)\in f(x)=\sqrt[۳]{-x+۱}$$
$$A(۰,۱)\in f^{-۱}(x)=-x^{۳}+۱$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۵۴ گزینه ۲

در $x=۰$، مقدار تابع برابر است با $y=۳$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a=۳$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x=\frac{۲۵}{۳}$، مقدار تابع برابر است با $y=۲/۵$.

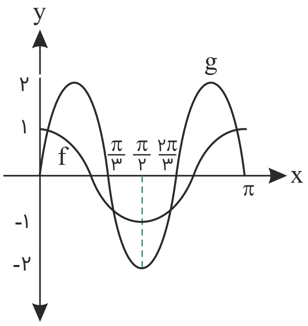
$$T=\frac{۲\pi}{|\pi b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}\ \checkmark\ ,\ b=\frac{۱}{۲}\ \times\ ,\ \ y=۳+\sin(\frac{-\pi}{۲}x)$$
$$\xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}} y=۳+\sin(\frac{-۲۵}{۶}\pi)\Rightarrow y=۳+\sin(-۴\pi-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow y=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵۵

گزینه ۳

نمودار دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \cos ۲x$ و $g(x) = ۲\sin(۳x)$ را در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ رسم می‌کنیم. این دو نمودار در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

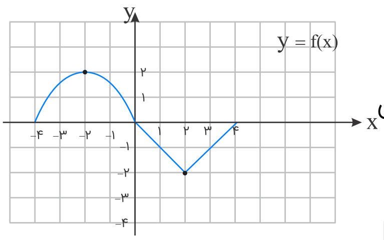


قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

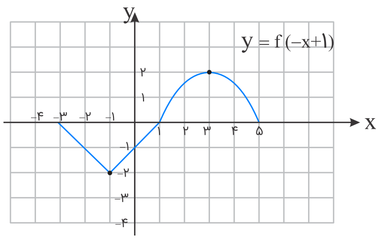
۵۶

گزینه ۲

نمودار رسم‌شده مربوط به $y = f(\frac{x}{۲})$ است. برای رسم تابع $f\,(x)$ کافی است طول نقاط را نصف کنیم.



برای رسم $y = f\,(-x+۱)$ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



باتوجه‌به شکل، تابع $y = f\,(-x+۱)$ در بازهٔ $[-۱, ۳]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۵۷

گزینه ۳

نقطهٔ $(۴, ۲) \in fog$ است، پس: $f(g(۴)) = ۲$

باتوجه‌به زوج‌های مرتب f، $f(۳) = ۲$، پس $g(۴) = ۳$؛ لذا باتوجه‌به زوج‌های مرتب g، $a = ۴$ است. از طرفی نقطهٔ $(۴, ۱) \in gof$ است، لذا: $g(f(۴)) = ۱$

اما $f(۴) = ۵$، پس باید نقطهٔ $(۵, ۱)$ متعلق به تابع g باشد، لذا $b = ۵$ و ازآنجا: $(a, b) = (۴, ۵)$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۵۸

گزینه ۳

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$۱-|a|=-۱ \Rightarrow |a|=۲$$

تابع در دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$۲T=\frac{۴}{۳} \Rightarrow T=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow |b|=۳$$

باتوجه‌به نمودار a و b هم‌علامت است؛ پس:

$$a+b=۵ \text{ یا } -۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۹

گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x=۲k\pi+\frac{i\pi}{۶}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos ۲x=\sin x \Rightarrow ۱-۲\sin^۲ x=\sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰ \Rightarrow (۲\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin x=-۱ \Rightarrow \sin x=\sin\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{۹\pi}{۶} \end{cases}$$

باتوجه‌به جواب‌های به‌دست‌آمده مقادیر i برابر است با:

$$i=\{۱,۵,۹\}$$

۶۰ گزینه ۲

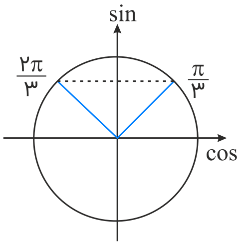
برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصلهٔ افقی طی شدهٔ آن بزرگ‌تر از $۵\sqrt{۳}$ باشد، پس داریم:

$$d > ۵\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{v^۲ \sin ۲\alpha}{۱۰} > ۵\sqrt{۳} \xrightarrow{v=۱۰} \sin ۲\alpha > \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون α زاویهٔ حاده است، پس ۲α از ۰ تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. طبق دایرهٔ مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{۳} < ۲\alpha < \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$$

به ازای $\alpha = \frac{\pi}{۶}$ و $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به ازای $\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۶۱ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

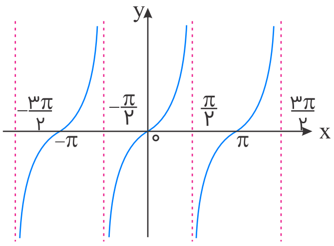
بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y\,(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

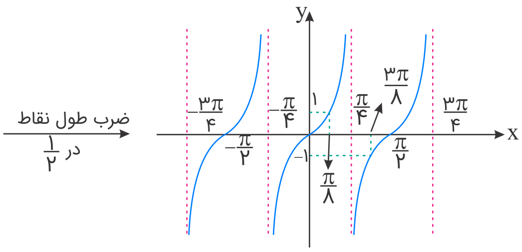
$$\max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۲ گزینه ۱

نمودار تابع $y=\tan(۲x)$ را با انقباض افقی نمودار تابع $y=\tan x$ رسم می‌کنیم:





باتوجه‌به نمودار بالا داریم:

$$\frac{\pi}{۸}<x<\frac{۳\pi}{۸},\, x\neq\frac{\pi}{۴}\Rightarrow|\tan(۲x)|>۱\Rightarrow\left|\frac{۲}{m-۳}\right|>۱$$
$$\Rightarrow|m-۳|<۲\Rightarrow ۱<m<۵$$

اما واضح است که مقدار $m=۳$ قابل‌قبول نیست.

$$\Rightarrow m\in(۱,۵)-\{۳\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۶۳ گزینه ۴

$$y=\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{دو واحد انتقال به راست}}y=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}}y=\sqrt{x+۲}$$
$$\xrightarrow{\text{دو واحد انتقال به راست}}y=\sqrt{(x-۲)+۲}=\sqrt{x}$$

تالیفی محمدرضا کشاورزی

۶۴

گزینه ۱

$$\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0/6$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \xrightarrow{\alpha=53^\circ} \cos 106^\circ = 2\cos^2 53^\circ - 1 = 2(0/6)^2 - 1 = \frac{72}{100} - 1 = -\frac{28}{100}$$

$$\cos(106^\circ) = \cos(90^\circ + 16^\circ) = -\sin 16^\circ = -\frac{28}{100} \Rightarrow \sin 16^\circ = \frac{28}{100}$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۶۵

گزینه ۴

در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ حاصل $A = \cos x - \sin x$ عدد منفی است، زیرا در این فاصله $\sin x$ از $\cos x$ بزرگ‌تر است، برای به دست آوردن این مقدار، طرفین $A = \cos x - \sin x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow A = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{غ.ق.ق} \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

۶۶

گزینه ۲

$$(2x_0, y_0) \in f(x) \Rightarrow f(2x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2} = 2x_0 \Rightarrow x - 3 = 4x_0 \Rightarrow x = 4x_0 + 3$$

$$y = -2f\left(\frac{x-3}{2}\right) + y_0 \Rightarrow y = -2f(2x_0) + y_0 = -2y_0 + y_0 = -y_0$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۶۷ گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰$، بنابراین:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}+a\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰\Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right)+a\left(\frac{۱}{۸}\right)+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}-۱=۰\Rightarrow a=۷$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر با $P(-۲)$ است، پس داریم:

$$P(x)=۲x^{۴}+۷x^{۳}+۲x^{۲}-۳x$$
$$\Rightarrow P(-۲)=۲(-۲)^{۴}+۷(-۲)^{۳}+۲(-۲)^{۲}-۳(-۲)=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶۸ گزینه ۴

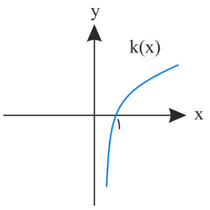
$f(g(x))$ یعنی در تابع f به‌جای x، عبارت $g(x)$ را قرار دهیم، چون $f(x)=x+۱$ است، پس داریم:

$$f(g(x))=g(x)+۱$$
$$\underbrace{(fog)(x)}_{f(g(x))}=\frac{x}{x^{۲}+۱}\Rightarrow g(x)+۱\Rightarrow \frac{x}{x^{۲}+۱}$$
$$g(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}-۱\Rightarrow g(x)=\frac{x-x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۶۹ گزینه ۴

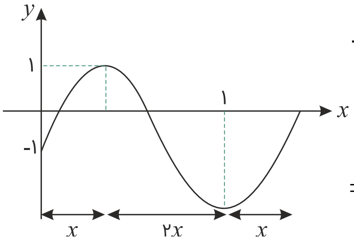
کافی است نمودار تابع‌ها را رسم نماییم. به‌سادگی می‌بینیم نمودار $k(x)=\log_{۲}^{x}$ مطابق شکل زیر، یک تابع اکیداً صعودی است.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۷۰ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل اگر دورهٔ تناوب تابع برابر $۴x$ باشد، $۳x = ۱$ است، پس $x = \frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید؛ بنابراین دورهٔ تناوب تابع $T = ۴x = \frac{۴}{۳}$ خواهد بود. از ضابطهٔ تابع دورهٔ تناوب برابر $T = \frac{۲\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید:



$$\frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۳}{۲} \\ b = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

اگر $b = \frac{۳}{۲}$ باشد، مقدار تابع در $x = \frac{۱}{۳}$ برابر ۱ است:

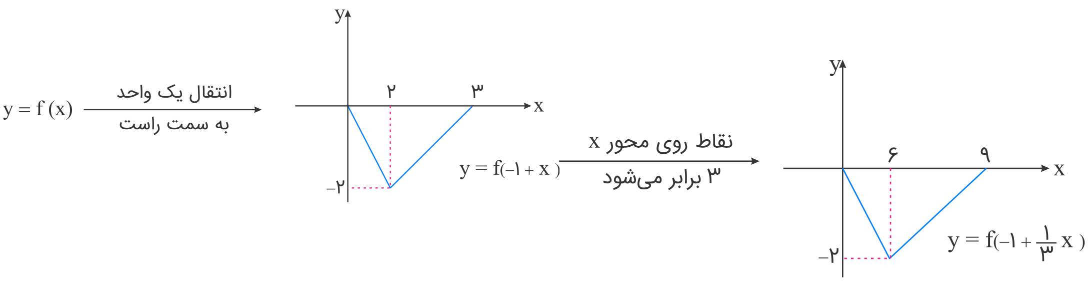
$$y(\frac{۱}{۳}) = a(۱) - ۱ = ۱ \Rightarrow a - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

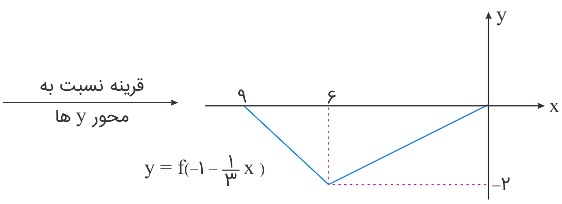
$$\Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۳}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

اگر $b = -\frac{۳}{۲}$ باشد، به‌طور مشابه $a = -۲$ به دست می‌آید که $a + b = \frac{-۷}{۲}$ می‌شود که در بین گزینه‌ها نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۶

۷۱ گزینه ۴





قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۹

۷۲ گزینه ۱

$$\cos ۴x = \cos ۲(۲x) = ۲\cos^۲ ۲x - ۱ = ۲(۱ - ۲\sin^۲ x)^۲ - ۱$$

$$= ۲(۱ - ۲(\frac{۳}{۵})^۲)^۲ - ۱ = ۲(۱ - \frac{۱۸}{۲۵})^۲ - ۱ = ۲(\frac{۷}{۲۵})^۲ - ۱ = -\frac{۵۲۷}{۶۲۵}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۷۳ گزینه ۴

ماکزیمم تابع $f(x) = \sqrt{۳} - \cos(\frac{\pi x}{۲})$ وقتی رخ می‌دهد که $\cos(\frac{\pi x}{۲}) = -۱$ است. به طور مشابه مینیمم هم وقتی رخ می‌دهد که $\cos(\frac{\pi x}{۲}) = ۱$ است.

$$\max : \sqrt{۳} - (-۱) = \sqrt{۳} + ۱ \quad , \quad \min : \sqrt{۳} - ۱$$

حالا دورهٔ تناوب را پیدا می‌کنیم:

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴$$

$$\text{مجموع مقادیر} : \sqrt{۳} + ۱ + \sqrt{۳} - ۱ + ۴ = ۲\sqrt{۳} + ۴$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۷۴ گزینه ۲

$$\cos\theta = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲\frac{\theta}{۲} = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin^۲\frac{\theta}{۲} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{۲} = \pm\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

چون $۰ < \theta < ۲\pi$، پس $۰ < \frac{\theta}{۲} < \pi$ می‌باشد که $\sin\frac{\theta}{۲}$ در این بازه مثبت است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۶

۷۵ گزینه ۱

$$f(x) = |x| \quad , \quad g(x) = x^۲ + ۲x + ۱ = (x+۱)^۲$$

$$(fog)(۱ - \sqrt{۲}) - (gof)(۱ - \sqrt{۲}) = f(g(۱ - \sqrt{۲})) - g(f(۱ - \sqrt{۲}))$$

$$= f((۱ - \sqrt{۲} + ۱)^۲) - g(|\overbrace{۱ - \sqrt{۲}}^{\text{منفی}}|) = f((۲ - \sqrt{۲})^۲) - g(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$= \left|۴ + ۲ - ۴\sqrt{۲}\right| - (\sqrt{۲} - ۱ + ۱)^۲ = |\overbrace{۶ - ۴\sqrt{۲}}^{\text{مثبت}}| - ۲ = ۶ - ۴\sqrt{۲} - ۲ = ۴(۱ - \sqrt{۲})$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۷۶ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

در همسایگی محذوف داده شده عدد ۳ حذف شده است پس عدد ۳ مرکز همسایگی است.

گام دوم

عدد ۳ مرکز همسایگی است.

$$۳ = \frac{۳a - ۷ + a + ۵}{۲} \Rightarrow ۶ = ۴a - ۲ \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

پس همسایگی محذوف به صورت $(-۱, ۷) - \{۳\}$ در می آید. بنابراین، شعاع همسایگی برابر است با:

$$\text{شعاع همسایگی} = \frac{۷ - (-۱)}{۲} = \frac{۷ + ۱}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۷۷ گزینه ۱

$$\lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\sqrt{۱ + \sin ۲x}} = \lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^۲}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{|\sin x + \cos x|} = \lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{(\sin x + \cos x)}$$

$$\lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^۲ x(\sin x + \cos x)} = \lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^۲ x} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۸ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل $f(x) = ۲x + ۲$ و $g(x) = -x$ است.

$$fog(-\frac{۳}{۲}) = f(g(-\frac{۳}{۲})) = f(\frac{۳}{۲}) = ۲(\frac{۳}{۲}) + ۲ = ۵$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۷۹ گزینه ۱

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = \lim_{x \to ۰} \frac{x\left(\sqrt{x + ۱} + ۱\right)}{(\sqrt{x + ۱} - ۱)(\sqrt{x + ۱} + ۱)} = \lim_{x \to ۰} \frac{x(\sqrt{x + ۱} + ۱)}{x} = ۲$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۸۰ گزینه ۱

گزینهٔ "۱":

$$\lim_{x\to(\frac{۳}{۴})^+}\frac{-x}{\tan\pi x+۱}=\frac{-\frac{۳}{۴}}{\tan((\frac{۳\pi}{۴})^+)+۱}=\frac{-\frac{۳}{۴}}{(-۱)^++۱}=\frac{-\frac{۳}{۴}}{۰^+}=-\infty$$

گزینهٔ "۲":

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۴})^+}\frac{-x}{\tan\pi x+۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\tan((-\frac{\pi}{۴})^+)+۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{(-۱)^++۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۰^+}=+\infty$$

گزینهٔ "۳":

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۴})^-}\frac{-x}{\tan\pi x+۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\tan((-\frac{\pi}{۴})^-)+۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{(-۱)^-+۱}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۰^-}=-\infty$$

گزینهٔ "۴" :

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-x}{\tan\pi x+۱}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\tan((\frac{\pi}{۲})^+)+۱}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{-\infty+۱}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{-\infty}=۰$$

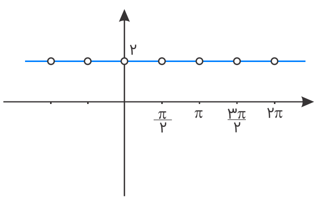
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۸۱ گزینه ۳

$$y=(\tan x+\cot x)^۲-\tan^۲x-\cot^۲x$$

$$=\tan^۲x+\cot^۲x+۲\tan x\cot x-\tan^۲x-\cot^۲x=۲\tan x\cot x=۲$$

$$D_y:\begin{array}{l}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{array}\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{x|x=\frac{k\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$



تالیفی محمدرضا کشاورزی

۸۲ گزینه ۲

تابع را به‌صورت $f = \{(-۶,۲),(۰,۴),(۲,m^۲-۳),(۶,۷),(۷,۹)\}$ مرتب می‌کنیم. ملاحظه می‌شود با افزایش x، مقادیر تابع در حال افزایش‌اند. برای اینکه تابع غیریکنوا شود باید $m^۲-۳>۷$ یا $m^۲-۳<۴$ باشد.

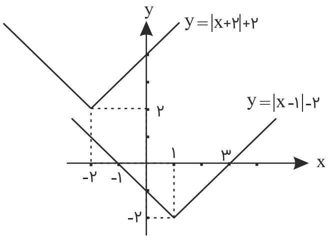
$$\begin{cases} m^۲-۳<۴ \Rightarrow m^۲<۷ \Rightarrow -\sqrt{۷}<m<\sqrt{۷} & (۱) \\ m^۲-۳>۷ \Rightarrow m^۲>۱۰ \Rightarrow m>\sqrt{۱۰} \text{ یا } m<-\sqrt{۱۰} & (۲) \end{cases}$$

باتوجه‌به بازه‌های (۱) و (۲)، m فقط اعداد صحیح $+۳$ و -۳ را نمی‌تواند بپذیرد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۸۳ گزینه ۴

$$f(x)=|x-۱|-۲ \xrightarrow{\text{سه واحد انتقال به چپ}} |x+۳-۱|-۲=|x+۲|-۲ \xrightarrow{\text{چهار واحد انتقال به بالا}} |x+۲|+۲$$



همانطور که از شکل مشخص است، این دو نمودار در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

تالیفی محمدرضا کشاورزی

۸۴ گزینه ۴

دامنهٔ $y=۲f(۲-x)+x$ برابر است با $[-۱,۳]$، پس:

$$-۱\le x\le ۳ \Rightarrow -۳\le -x\le ۱ \Rightarrow -۱\le ۲-x\le ۳$$

پس عبارت درون f باید در فاصلهٔ $[-۱,۳]$ باشد:

$$-۱\le \frac{x}{۳}\le ۳ \Rightarrow -۳\le x\le ۹$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۸۵ گزینه ۴

$$\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{23\pi}{12}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۸۶ گزینه ۳

زوایای 20° و 70° متمم هستند؛ پس $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ=0/28$ می‌باشد.

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow \cos 70^\circ=2\cos^2 35^\circ-1$$

$$\Rightarrow 0/28=2\cos^2 35^\circ-1\Rightarrow 2\cos^2 35^\circ=0/28+1=1/28$$

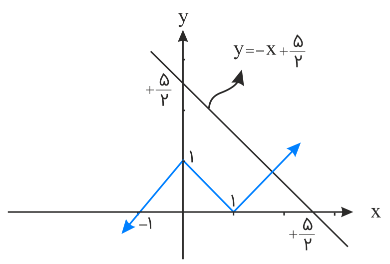
$$\Rightarrow \cos^2 35^\circ=0/64\Rightarrow \cos 35^\circ=0/8$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۶

۸۷ گزینه ۲

$$D_g: 2f(x+a)+2x-5=0\Rightarrow f(x+a)=-x+\frac{5}{2}$$

برای اینکه جواب معادلهٔ فوق یک بازه باشد، باید قسمتی از نمودار $f(x+a)$ بر تابع $y=-x+\frac{5}{2}$ منطبق شود. مطابق شکل، این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که نمودار تابع f به‌اندازهٔ $\frac{3}{2}$ واحد به راست انتقال یابد، یعنی $a=-\frac{3}{2}$.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۸۸

گزینه ۲

تابع اکیداً نزولی است درنتیجه باید:

$$\begin{cases} \left|\frac{۱}{۲}m - ۱\right| < ۲ \Rightarrow -۲ < m < ۶ \\ m > ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ < m < ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

۸۹

گزینه ۱

تابع $y = -۳\cos\frac{۱}{۲}x$ وقتی حداکثر مقدار خود را دارد که $\cos\frac{۱}{۲}x$ برابر با -۱ باشد و در فاصلهٔ $(-\pi, ۳\pi)$، فقط در نقطهٔ $x = ۲\pi$ برابر با -۱ است.

تالیفی محمد امین نباخته

۹۰

گزینه ۴

$$g^{-۱} = \{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

حال $g^{-۱}of$ را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g^{-۱}} ۴ \\ ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g^{-۱}} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g^{-۱}} \times \\ ۴ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g^{-۱}} ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-۱}of = \{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-۱}of$ باشد. خواستهٔ مسئله $h - f$ است که باید در دامنهٔ مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{۱,۴\}$$
$$h - f = \{(۱, ۴-۲),(۴, ۵-۶)\} = \{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{۲,-۱\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۱ گزینه ۴

ابهام حد از نوع $\infty - \infty$ است. برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x+2)-(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۴

۹۲ گزینه ۳

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

ابتدا توجه کنید که $D_f=(2,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,2]$. اکنون باید دامنهٔ gof را تعیین کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\left\{x>2 \mid \log_2^{(x-2)}\le 2\right\}$$
$$=\{x>2 \mid x-2\le 2^2\}=\{x>2 \mid x\le 6\}=(2,6]$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۹۳ گزینه ۴

برای خواستهٔ سؤال باید دورهٔ تناوب تابع را به دست آوریم؛ چراکه بعد از دورهٔ تناوب سال قمر در جای اول خود قرار می‌گیرد:

$$T=\frac{2\pi}{0/001}=2000\pi\simeq 2000\times 3/14=6280\ \text{سال}$$

تالیفی محمدجواد محسنی

۹۴ گزینه ۲

$$y=a-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2bx}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos 2bx+a-\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} y_{max}=\frac{1}{4}+a-\frac{1}{4}=a=1\Rightarrow a=1 \\ T=\frac{2\pi}{2|b|}=\frac{\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=1\Rightarrow b=\pm 1\end{cases}$$

$\Rightarrow a+b=0$ یا 2

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۹۵ گزینه ۲

رابطهٔ داده‌شده را خلاصه می‌کنیم:

$$y = \sin(۴\pi + \frac{۳\pi}{۲} - x) + ۴\cos(۴\pi + \pi - x) + k = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) + ۴\cos(\pi - x) + k$$
$$\Rightarrow y = -\cos x - ۴\cos x + k = -۵\cos x + k$$

بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب $|-۵| + k$ و $-|-۵| + k$ است.

$$k + ۵ = ۲(k - ۵) \Rightarrow k = ۱۵$$

تالیفی سیروس نصیری

۹۶ گزینه ۳

هریک از عبارت‌ها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$f(g(۱ - \sqrt{۲})) = f(\left|۱ - \sqrt{۲}\right|) = f(\sqrt{۲} - ۱) = [\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱}]$$

ازآنجاکه با گویا کردن مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱}$ خواهیم داشت: $\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} = \sqrt{۲} + ۱$، پس:

$$f(g(۱ - \sqrt{۲})) = [\sqrt{۲} + ۱] = ۲$$

ازطرفی:

$$g(f(۱ - \sqrt{۲})) = g([\frac{۱}{۱ - \sqrt{۲}}])$$

$\frac{۱}{۱ - \sqrt{۲}}$ برابر با $-(\sqrt{۲} + ۱)$ است، پس:

$$g([\frac{۱}{۱ - \sqrt{۲}}]) = g([-(\sqrt{۲} + ۱)]) = g(-۳) = |-۳| = ۳$$

درنتیجه:

$$f(g(۱ - \sqrt{۲})) - g(f(۱ - \sqrt{۲})) = ۲ - ۳ = -۱$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۷

۹۷

گزینه ۲

برد تابع f برابر $R_f=[0,+\infty)$ است چون $f(x)=\sqrt{2x-1}$ همواره مثبت است.

$$y=\sqrt{2x-1}\xrightarrow{\text{توان ۲}}y^2=2x-1\Rightarrow y^2+1=2x$$
$$\Rightarrow\frac{y^2+1}{2}=x\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}=\frac{1}{2}(x^2+1)$$

برد f با دامنهٔ f^{-1} برابر است، پس:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\quad ;x\geq 0$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۹۸

گزینه ۴

$$f(g(x))=4-(g(x))^2$$

دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-2,2]$ است، لذا:

$$-2\leq x\leq 2\Rightarrow 0\leq x^2\leq 4\Rightarrow -4\leq -x^2\leq 0$$
$$\Rightarrow 0\leq 4-x^2\leq 4\Rightarrow 0\leq\sqrt{4-x^2}\leq 2\Rightarrow 0\leq g(x)\leq 2$$

باید حدود تغییرات تابع f را در این بازه بیابیم:

$$\Rightarrow 0\leq g^2(x)\leq 4\Rightarrow -4\leq -g^2(x)\leq 0\Rightarrow 0\leq 4-g^2(x)\leq 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

۹۹

گزینه ۱

برای اینکه از تابع $y=f(\frac{1+x}{2})$ به تابع $y=f(\frac{1-x}{2})$ برسیم، کافی است که به جای x قرار دهیم $(-x)$. این کار یعنی اینکه نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۹

۱۰۰ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲-۲x}-۲x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^۲-۲x}-۲x)\times\frac{\sqrt{x^۲-۲x}+۲x}{\sqrt{x^۲-۲x}+۲x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۲x-۴x^۲}{\sqrt{x^۲-۲x}+۲x}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x^۲}{|x|+۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x^۲}{۳x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲-۲x}-۲x)\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}(|x|-۲x)=\lim_{x\to+\infty}(x-۲x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی